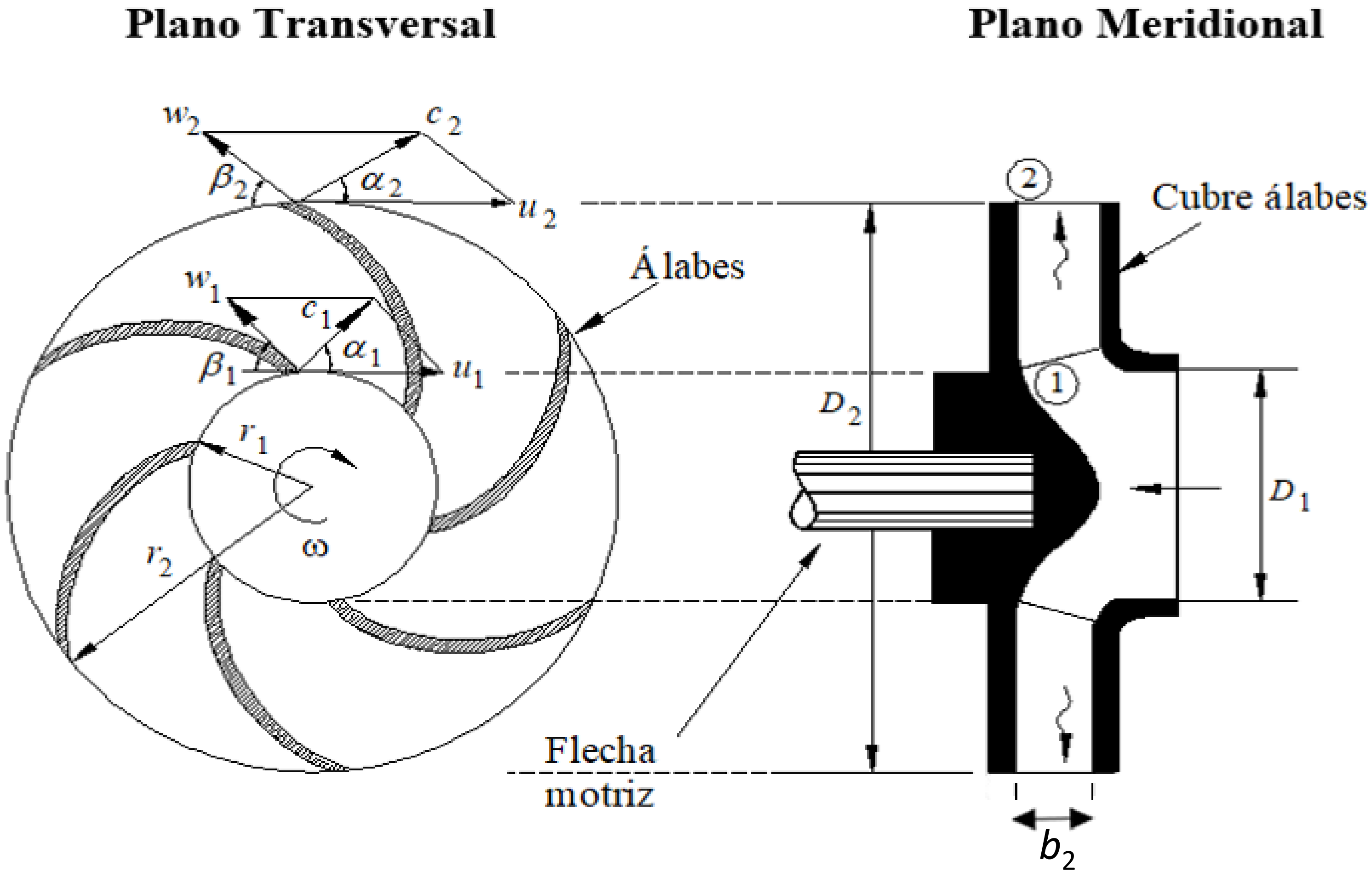
3.3 Teoría general del funcionamiento. Ecuación de Euler

Para el análisis del funcionamiento de una turbomáquina hidráulica (por ejemplo una bomba de flujo radial), es conveniente hacer su representación en dos planos:



En cualquier punto dentro del impulsor se definen las siguientes velocidades:

u velocidad periférica del álabe o circunferencial

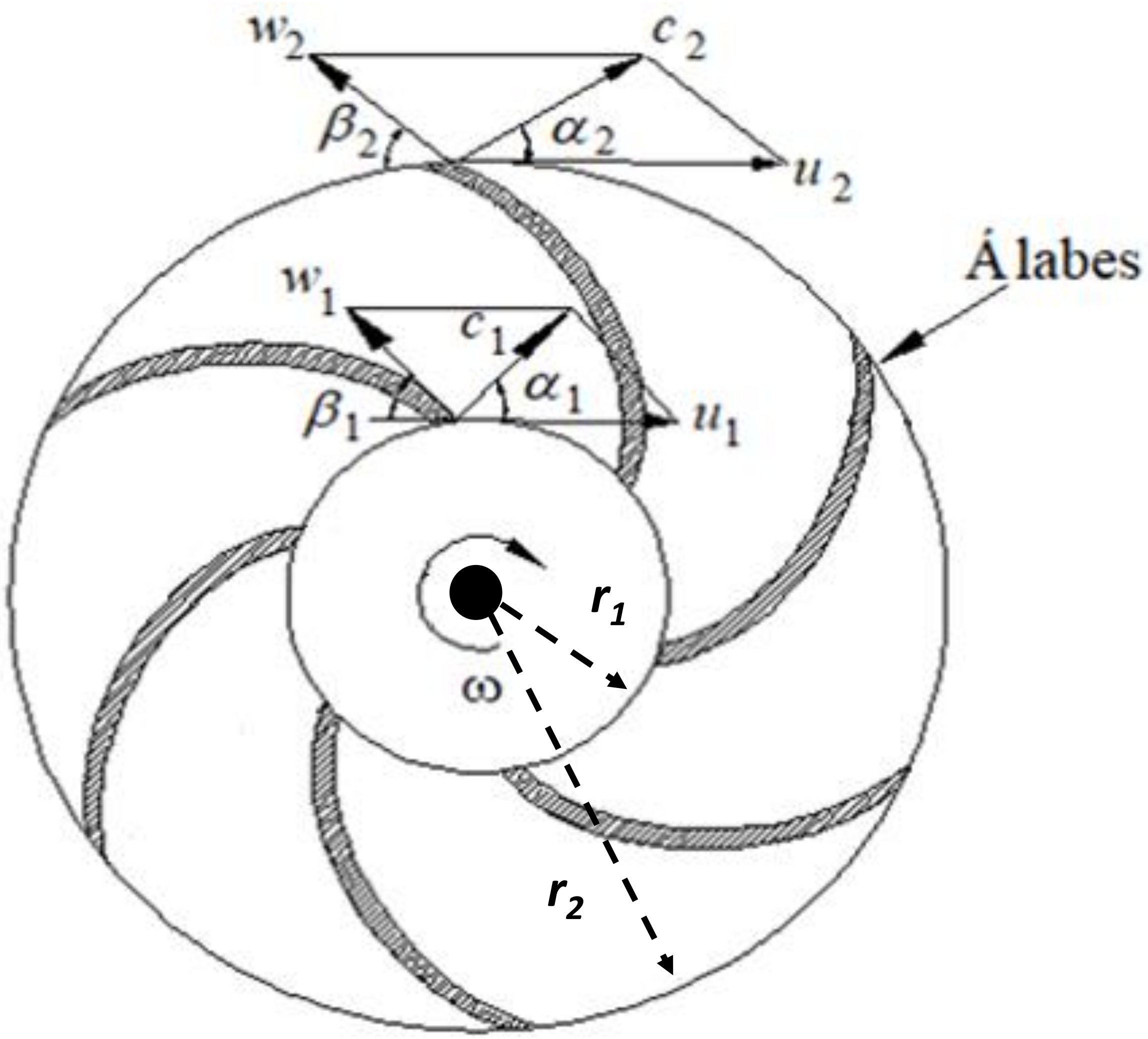
$$u = \omega r$$

donde $\omega\ (\frac{rad}{s}) = \frac{2\pi}{60} N(rpm)$

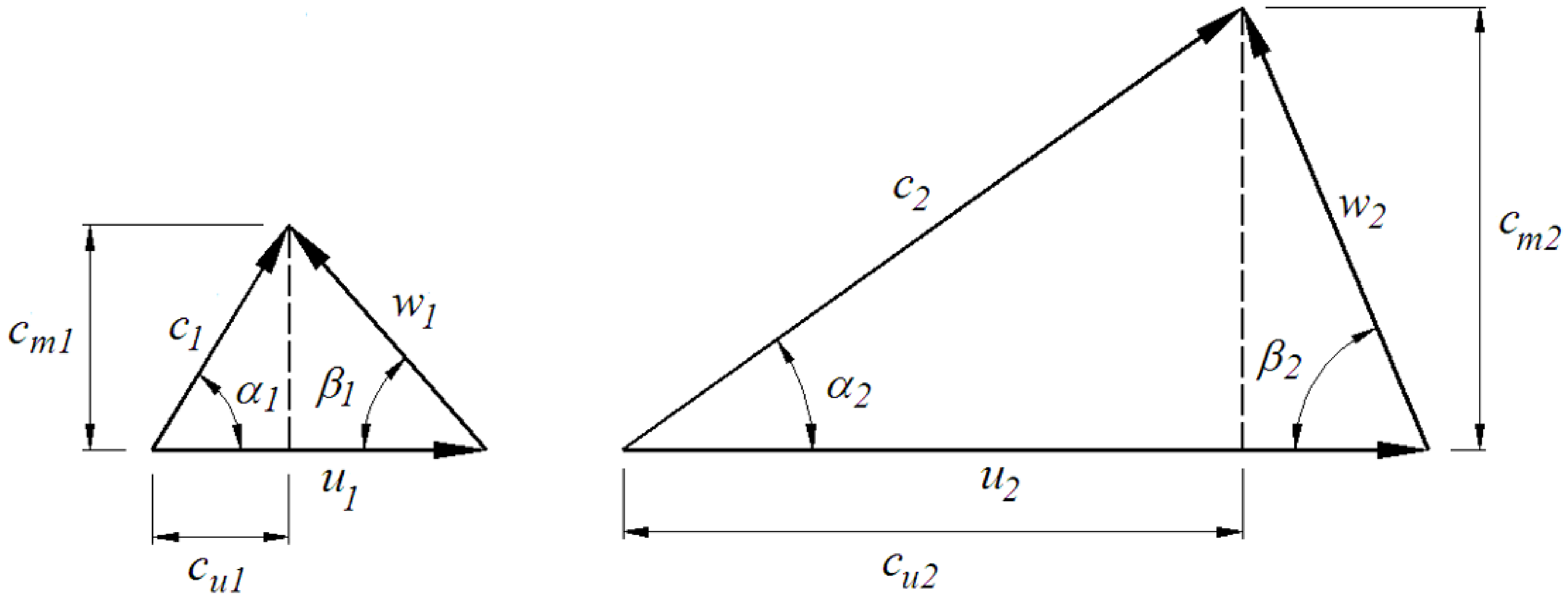
w velocidad relativa del fluido con respecto al álabe (siempre tangente al álabe)

c velocidad absoluta de la partícula de fluido

Nótese que $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$



Estos tres vectores forman un triángulo denominado **“triangulo de velocidades”**



La velocidad absoluta (c) tiene dos componentes:

$c_u = c \cos \alpha$ componente periférica ó tangencial

$c_m = c \operatorname{sen} \alpha$ componente meridional (normal a la velocidad periférica)

La ecuación de impulso y cantidad de movimiento establece que la fuerza resultante en el impulsor al paso del fluido está dada por:

$$\boldsymbol{F} = \gamma/g \sum Q_i \, \boldsymbol{v}$$

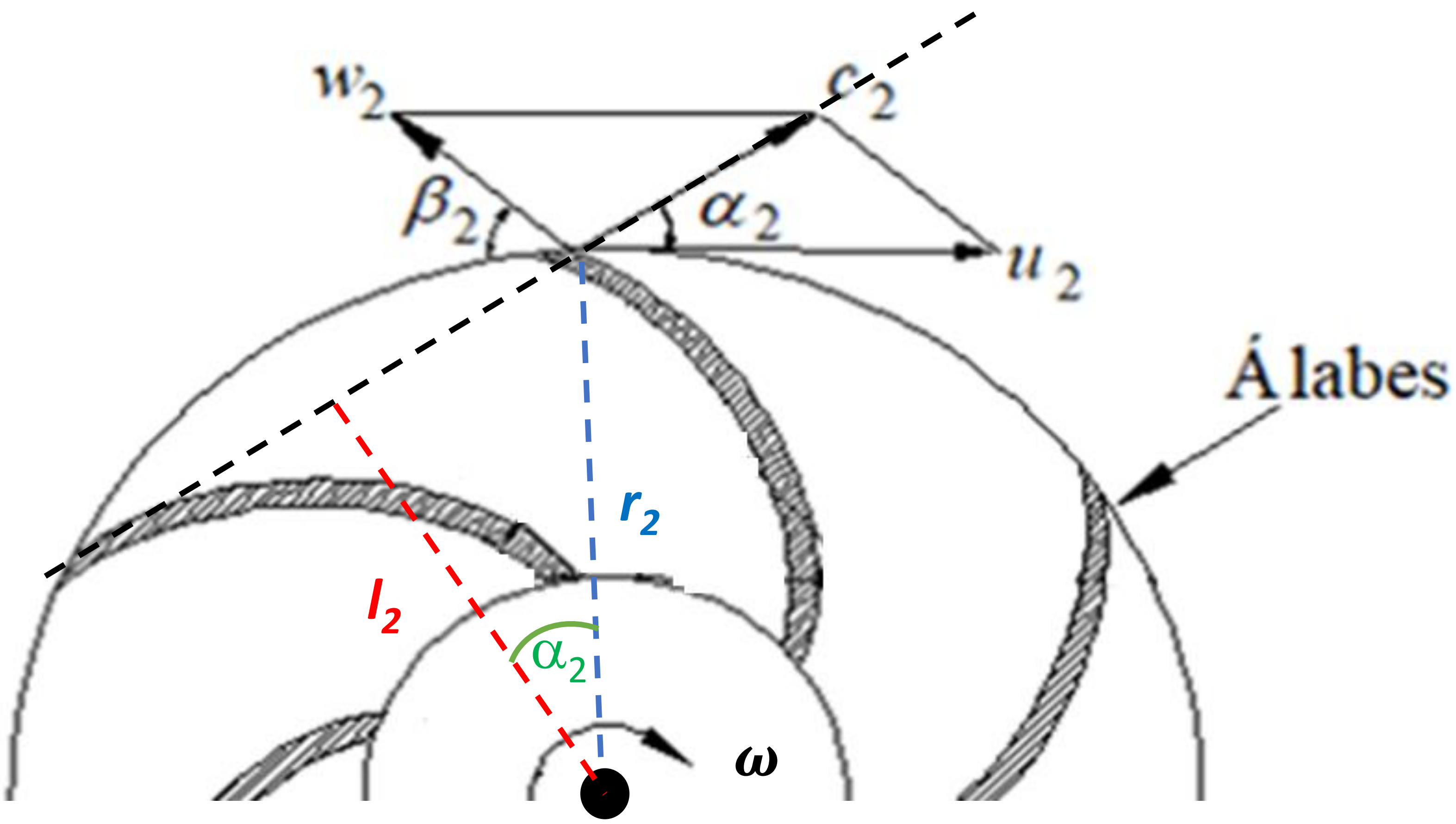
Si consideramos las secciones de entrada y salida y a la velocidad absoluta (c), se tiene que:

$$\boldsymbol{F} = \gamma/g \; Q_i \; (\boldsymbol{c_2} - \; \boldsymbol{c_1})$$

La magnitud del momento resultante de las fuerzas actuantes o momento hidráulico es:

$$M_u = \gamma/g \; Q_i \; (c_2 l_2 - \; c_1 l_1)$$

donde l_1 y l_2 son los brazos de palanca en las secciones de entrada y salida.



Del corte transversal puede observarse que; $l_1 = r_1 \cos \alpha_1$ y $l_2 = r_2 \cos \alpha_2$

Por lo que;

$$M_u = \gamma/g\ Q_i\ (c_2 r_2 \cos \alpha_2 - c_1 r_1 \cos \alpha_1)$$

La potencia teórica en la flecha está dada por:

$$P_u = \omega\, M_u$$

donde ω es la velocidad angular del impulsor (rad/s), por lo tanto:

$$P_u = \frac{\gamma}{g} \omega\, Q_i\, (c_2 r_2 cos\, \alpha_2 - \; c_1 r_1 cos\, \alpha_1)$$

Como $u = \omega\, r$:

$$P_u = \frac{\gamma}{g}\, Q_i\, (c_2 u_2 cos\, \alpha_2 - \; c_1 u_1 cos\, \alpha_1)$$

Cabe recordar que

$$\omega = \frac{2\pi}{60} N$$

siendo N la velocidad de giro del impulsor (rpm).

Si denominamos H_u a la carga teórica que el fluido transmite al impulsor y expresamos la potencia teórica en términos de esta carga y del gasto en el interior del impulsor resulta:

$$\boldsymbol{P_u = \gamma\, Q_i\, H_u}$$

Igualando se tiene que;

$$\gamma Q_i H_u = \frac{\gamma}{g}\, Q_i\, (c_2 u_2 cos\, \alpha_2 - c_1 u_1 cos\, \alpha_1)$$

de donde;

$$\boxed{H_u = \frac{1}{g}(c_2 u_2 cos\, \alpha_2 - c_1 u_1 cos\, \alpha_1)}$$

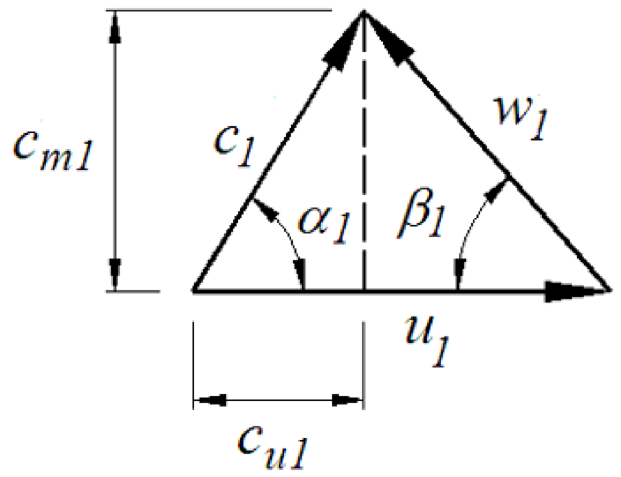
Que es la ecuación fundamental de las turbomáquinas o **Ecuación de Euler**.

También puede escribirse en la forma (segunda forma):

$$H_u = \frac{1}{g}\, (c_{u2} u_2 - c_{u1} u_1)$$

Del triángulo de velocidades, la ley de los cosenos puede escribirse como;

$$w^2 = c^2 + u^2 - 2\,c\,u\,\cos\alpha$$



De donde:

$$c\,u\,\cos\alpha = \frac{1}{2}\,(c^2 + u^2 - w^2)$$

Sustituyendo en la primera forma de la Ecuación de Euler resulta que:

$$H_u = \frac{1}{2g}\,({c_2}^2 + {u_2}^2 - {w_2}^2 - {c_1}^2 - {u_1}^2 + {w_1}^2)$$

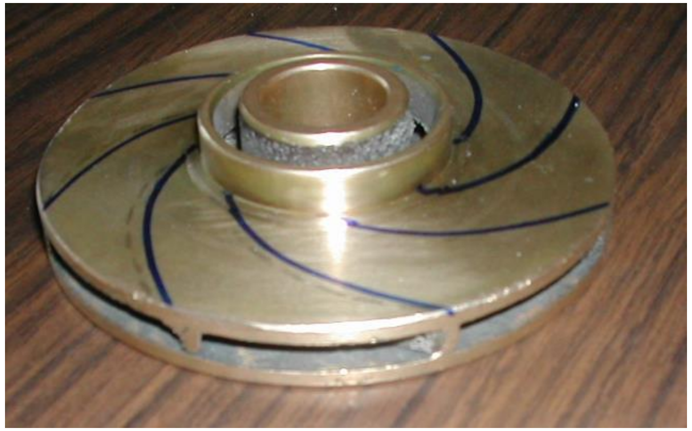
Finalmente se obtiene la tercera forma de la Ec. de Euler;

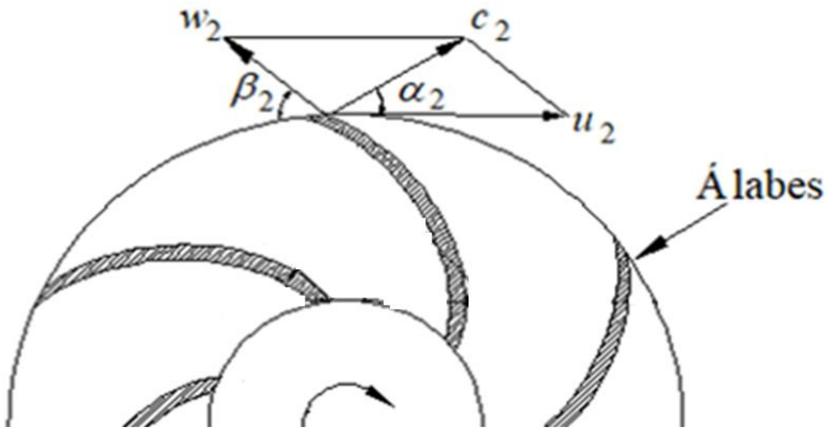
$$H_u = \frac{({c_2}^2 - {c_1}^2)}{2g} + \frac{({u_2}^2 - {u_1}^2)}{2g} + \frac{({w_1}^2 - {w_2}^2)}{2g}$$

El **gasto en el interior del impu**lsor es: $Q_i = A_1\, V_1$ ó $Q_i = A_2\, V_2$

Si se considera despreciable el espesor de los álabes, el área del paso del fluido al salir del impulsor es:

$A_2 = \pi D_2 b_2$

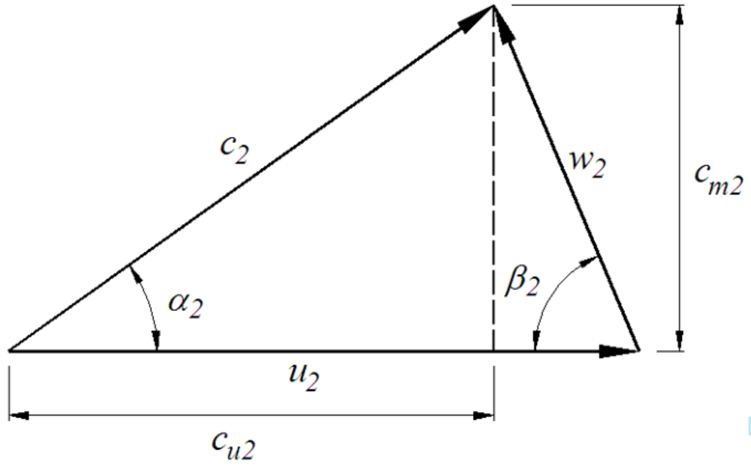




y la velocidad a considerar es la normal a esta área, es decir, la componente meridional c_{m2}, por lo que:

$Q_i = A_2\, c_{m2} = \pi\, D_2 b_2 c_{m2} = 2\pi\, r_2 b_2 c_{m2}$

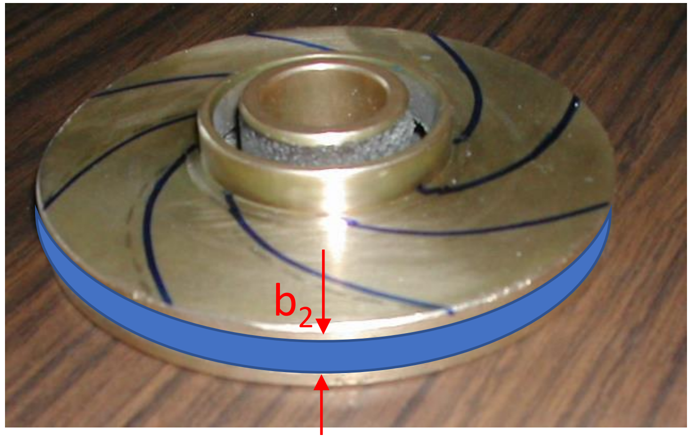
y también $Q_i = 2\pi\, r_1 b_1 c_{m1}$

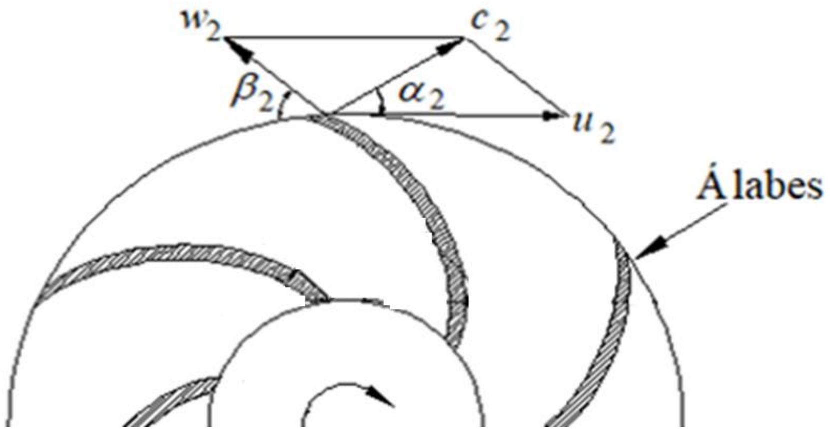


El **gasto en el interior del impul**sor es: $Q_i = A_1 \, V_1$ ó $Q_i = A_2 \, V_2$

Si se considera despreciable el espesor de los álabes, el área del paso del fluido al salir del impulsor es:

$A_2 = \pi D_2 b_2$

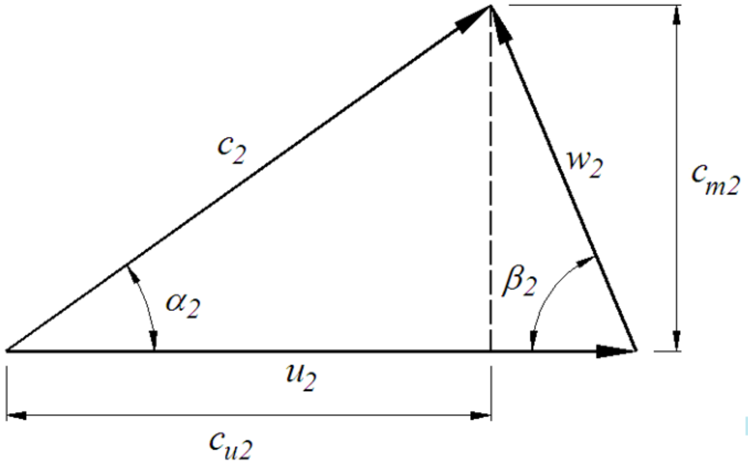




y la velocidad a considerar es la normal a esta área, es decir, la componente meridional c_{m2}, por lo que:

$Q_i = A_2 \, c_{m2} = \pi \, D_2 b_2 c_{m2} = 2\pi \, r_2 b_2 c_{m2}$

y también $Q_i = 2\pi \, r_1 b_1 c_{m1}$

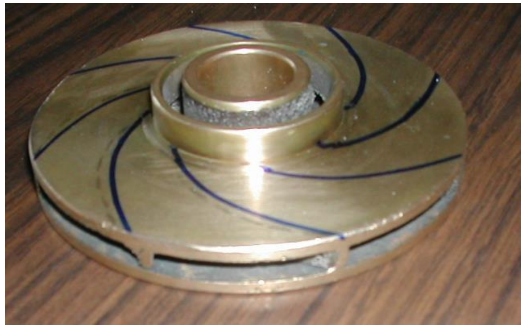


PROBLEMA

El impulsor visto en clase tiene las características geométricas indicadas a continuación:

$D_1=$	34	mm	$D_2=$	84	mm
$b_1=$	4.5	mm	$b_2=$	4.5	mm
$\beta_1=$	40	grados	$\beta_2=$	25	grados

Flujo de entrada radial



Si la bomba gira a 3,600 rpm y el impulsor se diseñó de forma que el flujo de entrada sea radial Determine:

a) El gasto en el interior del impulsor
b) La carga y la potencia teóricas

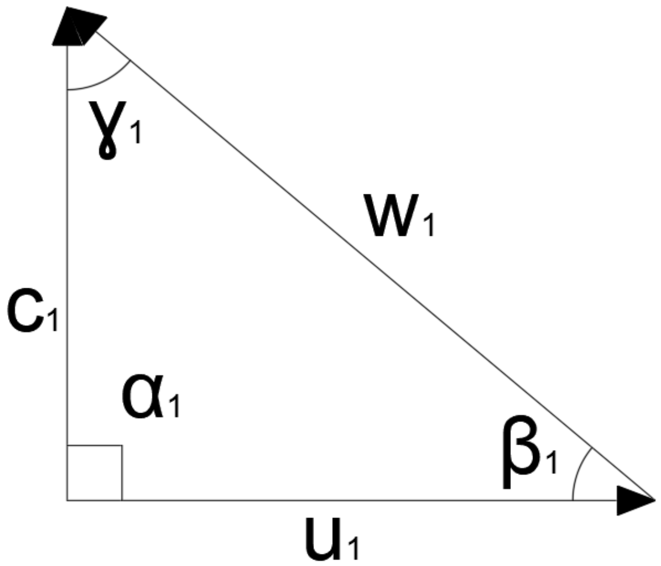
Solución a)

$Q_i = 2\pi\, r_1 b_1 c_{m1}$ o bien $Q_i = 2\pi\, r_2 b_2 c_{m2}$

¿*Con cuál de las dos expresiones* podemos *calcular el gasto con los datos disponibles*?

$c_{m1} = c_1 sen\alpha_1$

$c_1 = ?$



Triángulo de entrada

De la definición de tangente:

$$c_1 = u_1 tan\beta_1$$

Para determinar c_1 es necesario conocer u_1 o w_1; u_1 se obtiene directamente de la expresión:

$$u_1 = \omega r_1; \qquad \omega = \frac{2\pi}{60} N \quad \therefore$$

$$\omega = \_\_\_\_[s^{-1}] \qquad\qquad u_1 = \_\_\_\_\left[\frac{m}{s}\right]$$

$c_1 = \_\_\_\_ \left[\frac{m}{s}\right] \therefore$

¿ Cuánto vale α_1?

$c_{m1} = \_\_\_\_ \left[\frac{m}{s}\right]$

¿ Cuánto vale C_{u1} ?

Para obtener el gasto al interior del impulsor: $Q_i = 2\pi\, r_1 b_1 c_{m1}$ ó $Q_i = \pi\, D_1 b_1 c_{m1}$

$$\boxed{Q_i = \_\_\_\_ \left[\frac{m^3}{s}\right]}$$

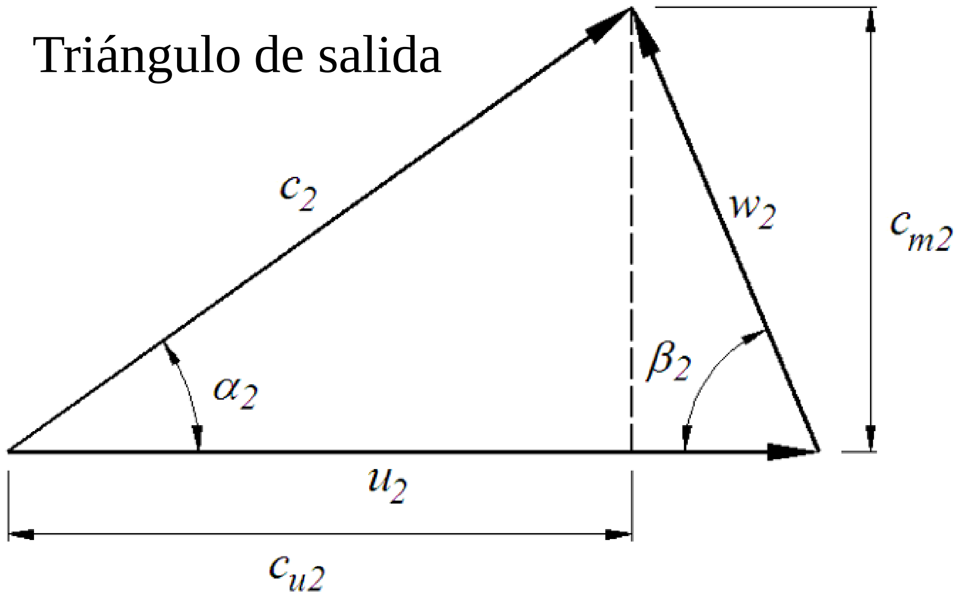
Solución b)

Para obtener la carga teórica H_u:

$$\boldsymbol{H_u = \frac{1}{g}\left(c_2 u_2 \cos\alpha_2 - c_1 u_1 \cos\alpha_1\right)}$$

$$H_u = \frac{1}{g}\left(c_{u2}u_2 - c_{u1}u_1\right)$$

Triángulo de salida



$$c_{m2} = Q_i/A_2 = Q_i/\pi D_2 b_2$$

$c_{m2} =$ _____ m/s

$u_2 = \omega r_2 =$ _____ m/s

$w_2 = c_{m2} / \text{sen } \beta_2 =$ _____ m/s

$c_{u2} = u_2 - w_2 \cos \beta_2 =$ _____ m/s

¿Cuáles son los valores de c_2 y α_2?

Sustituyendo los valores en H_u:

$$H_u = \frac{1}{g}(c_{u2}u_2 - c_{u1}u_1)$$

$$\boxed{H_u = \_\_\_\_[m]}$$

Para la potencia P_u:

$$P_u = \gamma Q_i H_u$$

$$\boxed{P_u = \_\_\_\_[kW]}$$

$$\boxed{P_u = \_\_\_\_[hp]}$$